

# Brobygning med fokus på statik og materialeforståelse (opgavebeskrivelse)

## Formål

Formålet med forløbet er at give dig erfaring med at designe, bygge og undersøge en brokonstruktion. Du skal arbejde undersøgende med, hvordan ændringer påvirker broens styrke, og lære at vurdere, hvor og hvordan man kan reducere materialeforbruget uden at gå på kompromis med funktionen.

## Introduktion

I dette forløb skal du arbejde med at designe, bygge og undersøge en brokonstruktion. Formålet er at få en praktisk forståelse af, hvordan kræfter påvirker en konstruktion, og hvordan ændringer i opbygningen kan gøre en bro stærkere eller svagere. Undervejs skal du arbejde med centrale fysikbegreber som kraftmoment, statik, tryk- og trækkræfter og gitterkonstruktioner. Disse begreber bruges til at analysere, hvordan en konstruktion bærer last, og hvordan kræfterne fordeler sig i de enkelte bjælker.

Du skal arbejde i grupper, hvor I sammen skal bygge en bro af bjælker fra et byggesæt. Når broen er samlet, skal I teste den med en kraftsensor og måle, hvordan kræfterne ændrer sig, når I påvirker broen forskellige steder. På baggrund af målingerne skal I ændre i konstruktionen (fx fjerne eller flytte bjælker), teste igen og sammenligne resultaterne. Målet er, at I får erfaring med, hvordan små ændringer i konstruktionen kan give store ændringer i kraftpåvirkningen.

Undervejs skal I også udføre simple beregninger, der viser, hvilke kræfter og momenter der virker i konstruktionen, og bruge dem til at forudsige, hvad der sker, når I ændrer broens opbygning. På den måde arbejder I både praktisk og teoretisk, og I lærer at koble data og fysik sammen med ingeniørmæssige overvejelser.

Forløbet munder ud i, at I skal vurdere, om det er muligt at reducere materialeforbruget, uden at broen mister sin funktion eller stabilitet. Det betyder, at I skal argumentere for, hvilke bjælker der er nødvendige, hvilke der kan undværes, og hvilke ændringer der giver den bedste balance mellem styrke og materialeforbrug. I lærer dermed, hvordan man kan bygge smartere og mere effektivt, og hvordan fysiske principper kan bruges til at træffe gode valg i konstruktion og design.

Opgavebeskrivelse kommer efter dette afsnit. Teori og manual til programmet til dataopsamling er efter opgavebeskrivelsen, samt med materialeliste. Benyt opgavebeskrivelsen til inspiration, men brug/undersøg gerne andre ting undervejs, hvis der sker eller I ser noget der kunne være interessant at undersøge/ændre i forhold til broen.

## Opgavebeskrivelse:

I dette forløb skal I undersøge, hvordan en brokonstruktion påvirkes af kræfter forskellige steder, og hvordan ændringer i opbygningen kan styrke eller svække konstruktionen. I arbejder både med statisk belastning (lodder) og dynamisk belastning (vogn på bane).

Overordnet set er projekt opdelt på tre måder, alt afhængigt af om I skal bruge 2-4 lektion, 4-6 lektioner eller 2 dage

### Ultralight – Fokus

I denne version skal I hurtigt bygge en simpel bro og lave få, korte målinger. Fokus er på at få en fornemmelse af, hvordan kræfter fordeler sig i konstruktionen, og hvordan én lille ændring (fx at fjerne en bjælke) påvirker styrken. I skal ikke lave beregninger — målet er at lege jer frem til en grundlæggende forståelse.

### Mini – Fokus

Her arbejder I lidt mere systematisk. I bygger en bro, tester den med både lodder og vogn, og laver små, overskuelige beregninger for at støtte jeres forståelse. Fokus er på at se sammenhængen mellem målinger, simple teoribegreber og ændringer i konstruktionen. I skal vurdere, om der er dele af broen, der kan fjernes eller ændres uden at miste styrke.

### Projektdage – Fokus

I denne version går I i dybden. I bygger, tester, ændrer og dokumenterer jeres bro flere gange. I arbejder med både statisk og dynamisk belastning (lodder + vogn), laver simple beregninger og bruger resultaterne til at analysere kraftfordeling og opbygning. Fokus er på at udvikle en konstruktion, hvor materialeforbruget er reduceret på et fagligt begrundet grundlag.

Jeres opgave består af følgende dele, som mest af alt er inspiration til rækkefølgende, til at komme igennem undersøgelserne - I skal således ikke følge denne til punkt og prikke, men lade jer inspirere af den.

---

### 1. Bygning af broen

- I skal som gruppe designe og bygge en bro-model ud fra byggesættet.

- Start med en simpel gitterkonstruktion, som kan bære lodder og en lille vogn.
  - Broen skal kunne have en vognbane monteret, så en lille vogn kan køre hen over konstruktionen.
- 

## 2. Første målinger med lodder (statisk belastning)

- Sæt kraftmåleren fast på én bjælke i broen.
  - Placer lodder forskellige steder på broen (fx midten, nær støttepunkter eller yderkanter).
  - Mål, hvordan kraftpåvirkningen ændrer sig, afhængigt af hvor loddet placeres.
  - Notér jeres observationer: Hvor er kræfterne størst? Hvilke bjælker virker mest belastede?
- 

## 3. Undersøgelse med vognbane og lille vogn (dynamisk belastning)

- Monter vognbanen på broen.
  - Brug den lille vogn, og tilføj forskellig masse ovenpå den.
  - Lad vognen køre hen over broen og registrér, hvordan kraftpåvirkningen ændrer sig, når vognen:
    - passerer målepunktet,
    - accelererer ned ad en kant,
    - eller bevæger sig langsomt hen mod midten.
  - Sammenlign målingerne for let vogn vs. tung vogn.
  - Diskutér: Hvilke dele af broen er mest følsomme over for bevægende last?
- 

## 4. Ændringer i konstruktionen

- Lav justeringer i broens opbygning, fx:
  - fjern en diagonal,
  - flyt en bjælke,
  - tilføj en ny støtte,
  - eller lav en alternativ gittervinkel.

- Test både med lodder og med vogn igen.
  - Sammenlign resultaterne:
    - Hvilke ændringer gør broen stærkere?
    - Hvilke gør den svagere?
    - Hvad overraskede jer?
- 

## 5. Enkle beregninger

- Lav en simpel teoretisk beregning på én valgt bjælke:
    - Beregn et kraftmoment for et lod placeret på en bestemt afstand.
    - Brug loddet/vognens masse i beregningen.
    - Brug resultaterne til at forstå, hvorfor målingerne ser ud, som de gør.
  - Beregningerne skal hjælpe jer med at forklare jeres data — de skal ikke være perfekte.
- 

## 6. Vurdering af materialereduktion

- Undersøg, om broen kan bygges med færre bjælker uden at miste styrke.
  - Brug jeres målinger (lodder + vogn) til at argumentere for,
    - hvilke bjælker der er nødvendige,
    - hvilke der kan undværes,
    - og hvordan broens opbygning påvirker kraftfordelingen.
  - Målet er at finde en konstruktion, der både er stabil og materialeeffektiv.
- 

## 7. Dokumentation

I skal løbende holde styr på:

- jeres målinger (lodder + vogn),
- ændringer i konstruktionen,
- kort forklaring af jeres valg og resultater,
- en afsluttende vurdering af, om materialereduktion var muligt — og hvorfor.

*Følgende teori-afsnit er blot til inspiration og andre bøger, materialer og online ressourcer kan anvendes i stedet.*



# Teori

## Kraftmoment (drejningsmoment)

Kraftmoment beskriver, hvordan en kraft skaber rotation omkring et punkt eller en akse. Når en kraft påvirker et objekt, vil den ikke kun forsøge at skubbe eller trække objektet, men også ofte forsøge at dreje det. Hvor meget kraften "vil dreje", afhænger både af kraftens størrelse og afstanden til drejepunktet.

Den grundlæggende formel for kraftmoment er:

$$M = F \cdot r$$

hvor

- **M** er momentet (i newtonmeter, Nm),
- **F** er kraften (N),
- **r** er den vinkelrette afstand fra kraftens angrebspunkt til drejeaksen (m).

Denne formel gælder, når kraften virker vinkelret på armen. Hvis kraften ikke virker vinkelret, bruger man den mere generelle formel:

$$M = F \cdot r \cdot \sin(\theta)$$

hvor

- **$\theta$**  er vinklen mellem kraftens retning og armen (distance  $r$ ).

Det er  $\sin(\theta)$ , fordi det er den vinkelrette komponent af kraften, der bidrager til rotationen. Hvis kraften trækker i samme retning som armen ( $\theta = 0^\circ$ ), bliver  $\sin(0^\circ) = 0 \rightarrow$  intet moment. Hvis kraften trækker præcis vinkelret ( $\theta = 90^\circ$ ), bliver  $\sin(90^\circ) = 1 \rightarrow$  fuldt moment.

---

## Hvorfor er kraftmoment relevant i brobygning?

I konstruktioner er det vigtigt at kunne vurdere, hvor store kræfter og momenter der påvirker de enkelte bjælker. Når en last (f.eks. en vogn eller et lod) påvirker broen, vil nogle bjælker komme i tryk, andre i træk, og nogle steder opstår der momenter, der kan fortælle noget om hvor udsatte dele af konstruktionen er. Hvis et moment bliver for stort, kan konstruktionen deformeres eller knække – derfor er det vigtigt at forstå det grundlæggende.

---

### Regneeksempel 1 – Moment uden vinkel

En kraft på **25 N** påvirker enden af en bjælke **0,40 m** fra rotationspunktet. Kraften er vinkelret på bjælken.

$$M = F \cdot r = 25 \text{ N} \cdot 0,40 \text{ m} = 10 \text{ Nm}$$

Bjælken påvirkes altså med et moment på **10 Nm**.

---

### Regneeksempel 2 – Moment med vinkel

En kraft på **30 N** påvirker en bjælke i en afstand af **0,50 m**, men kraften virker i en **vinkel på 35°** i forhold til bjælken.

$$M = F \cdot r \cdot \sin(\theta)$$

$$M = 30 \text{ N} \cdot 0,50 \text{ m} \cdot \sin(35^\circ)$$

$$\text{hvor } \sin(35^\circ) \approx 0,574$$

$$M = 30 \cdot 0,50 \cdot 0,574 \approx 8,6 \text{ Nm}$$

Momentet bliver derfor **ca. 8,6 Nm**, hvilket er mindre end hvis kraften havde været vinkelret (hvor momentet havde været 15 Nm). Dette viser, hvorfor vinklen er afgørende.

### Statik og ligevægt (kræfter og momenter i balance)

Statik handler om situationer, hvor et system ikke bevæger sig: Det står stille, eller det ligger i ro. En konstruktion – som f.eks. en bro – er statisk, når alle kræfter og momenter "opvejer hinanden", så der hverken sker rotation eller translation (bevægelse).

For at en konstruktion er i statisk ligevægt, skal tre betingelser være opfyldt:

- 1. Kraftsum i x-retningen er 0**
- 2. Kraftsum i y-retningen er 0**
- 3. Momentsummen omkring et vilkårligt punkt er 0**

Man skriver det ofte sådan:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0$$

**Note :**

Symbolet  $\Sigma$  (sum) betyder "summen af alle".

$F_x$  betyder  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow$  "alle kræfter i vandret retning lagt sammen giver 0".

Det betyder i praksis:

- Hvis noget trækker til højre, skal noget andet trække lige så meget til venstre.
- Hvis noget trykker nedad, skal konstruktionen yde lige så meget kraft opad.
- Hvis en belastning forsøger at dreje konstruktionen, skal noget give et moddrejningsmoment.

---

**1. Ligevægt i x-retningen**

Kræfter der virker vandret (f.eks. træk- og trykkræfter i bjælker) skal balancere hinanden.

Hvis en bjælke i et gitter trækker til højre med 120 N, skal en anden bjælke eller støtte yde 120 N til venstre for at konstruktionen ikke bevæger sig.

$$\Sigma F_x = 0$$

Eksempel på kræfter i x-retningen:

- Trækkraft i en skrå bjælke (dens vandrette komponent).
- Trykkraft fra en støtte.
- Reaktionskræfter ved broens ender.

---

**2. Ligevægt i y-retningen**

Dette gælder for kræfter der virker lodret – f.eks. vægten af en vogn, lodder eller broens egne materialer.

Hvis noget vejer 50 N og trækker konstruktionen ned, skal broens støtter tilsammen yde 50 N opad.

$$\Sigma F_y = 0$$

Eksempler på y-kræfter:

- Tyngdekraft (nedad)
- Støttekraft fra underlaget (opad)

- Lodret komponent af skrå træk-/trykkraft i en bjælke
- 

### 3. Momentsum = 0

Som i kraftmoment-afsnittet gælder:

Hvis en kraft forsøger at dreje konstruktionen med et moment i én retning, skal der være et modmoment i den anden retning.

$$\sum M = 0$$

Man kan vælge et vilkårligt punkt at beregne momenter omkring – ofte et støttepunkt.

#### Eksempel: Statisk ligevægt med person + broens egen masse

Vi ser på en bro/planke, der er understøttet i **venstre ende (A)** og **højre ende (B)**.

Broen er **L = 4,0 m** lang.

Der virker tre lodrette kræfter:

1. **Personen** står 1/4 ind fra venstre støtte:
  - Afstand fra A: 1,0 m
  - Tyngdekraft:  $F_p = 70 \text{ N}$
2. **Broens egen tyngdekraft** virker i dens **massemidtpunkt** (midten):
  - Afstand fra A: 2,0 m
  - Tyngdekraft:  $F_b = 40 \text{ N}$
3. **Støtterne** yder reaktionskræfter:
  - $R_A$  i venstre støtte
  - $R_B$  i højre støtte

Vi antager broen er i statisk ligevægt, så:

$$\sum F_y = 0 \text{ og } \sum M = 0$$

---

#### 1) Ligevægt i y-retningen

Alle lodrette kræfter skal balancere:

$$R_A + R_B - F_p - F_b = 0$$

Indsæt værdier:

$$\begin{aligned}R_A + R_B - 70 - 40 &= 0 \\R_A + R_B &= 110 \text{ N}\end{aligned}$$

Dette fortæller kun, at støtterne *til sammen* skal bære 110 N.  
For at finde hver støttekraft skal vi bruge momentbetingelsen.

---

## 2) Momentsum = 0 (om punkt A)

Vi tager moment omkring punkt A (så  $R_A$  ikke indgår).

- Personens kraft giver et *med-uret* moment:

$$M_p = 70 \text{ N} \cdot 1,0 \text{ m}$$

- Broens egen vægt giver også et *med-uret* moment:

$$M_b = 40 \text{ N} \cdot 2,0 \text{ m}$$

- Reaktionen i B giver et *mod-uret* moment:

$$M_{R_B} = R_B \cdot 4,0 \text{ m}$$

Ligevægt:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\R_B \cdot 4,0 - (70 \cdot 1,0 + 40 \cdot 2,0) &= 0 \\R_B \cdot 4,0 - (70 + 80) &= 0 \\R_B \cdot 4,0 &= 150 \\R_B &= 37,5 \text{ N}\end{aligned}$$

---

## 3) Find $R_A$

Vi bruger kraftligningen:

$$R_A + R_B = 110$$

$$R_A + 37,5 = 110$$

$$R_A = 72,5 \text{ N}$$

---

### ★ Resultat

Kraft	Størrelse
Reaktion i venstre støtte (A)	<b>72,5 N</b>
Reaktion i højre støtte (B)	<b>37,5 N</b>
Personens vægt	70 N
Broens vægt	40 N

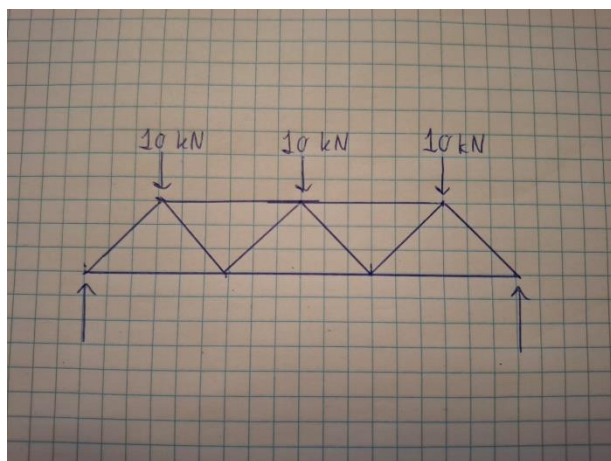
---

### Hvad viser eksemplet?

- Den støtte, der er **tættest på lasten**, bærer mest (A ligger tæt på personen → største kraft).
- Broens egen vægt påvirker resultatet betydeligt.
- Statisk ligevægt kræver både:
  - $\sum F_y = 0$  (ingen bevægelse op/ned)
  - $\sum M = 0$  (ingen rotation)

## Simpel beregning på gitterkonstruktion

Vi forestiller os en bro som er påvirket med 10 kN i tre punkter øverst, og er understøttet i to punkter i højre og venstre side.



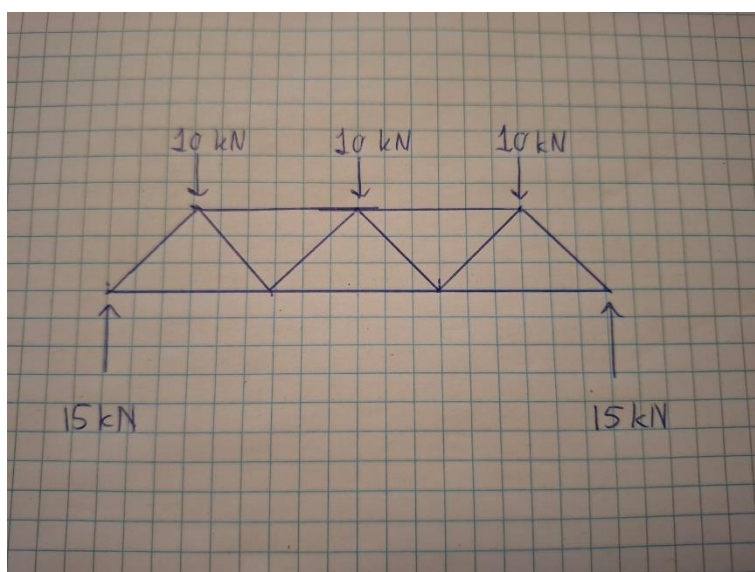
Hvor stor er belastningen i disse to punkter?

Da belastningen er symmetrisk, så lægger vi de tre kræfter sammen til en start

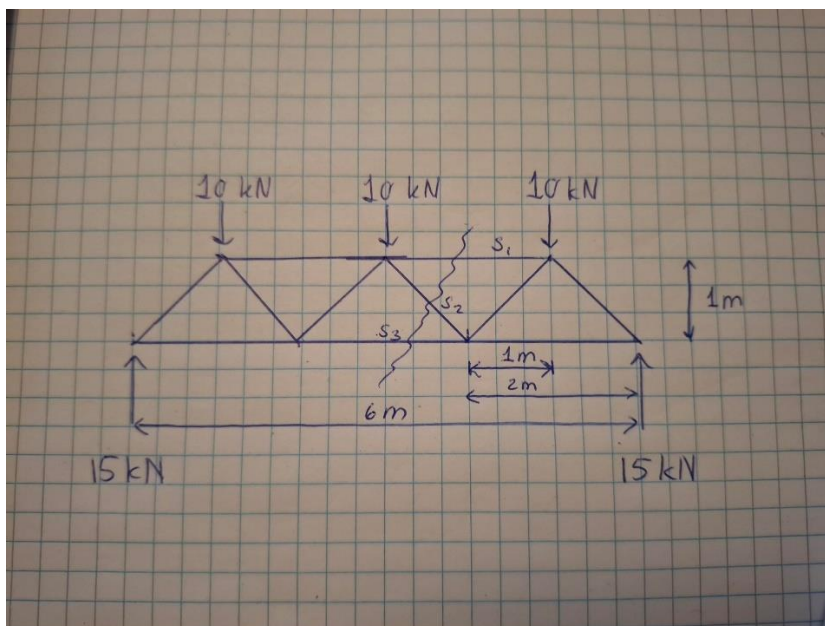
$$3 \cdot 10 \text{ kN} = 30 \text{ kN}$$

Denne belastning forledes mellem de to punkter og kræfterne som virker tilbage på konstruktion (reaktioner fra underlaget) bliver dermed

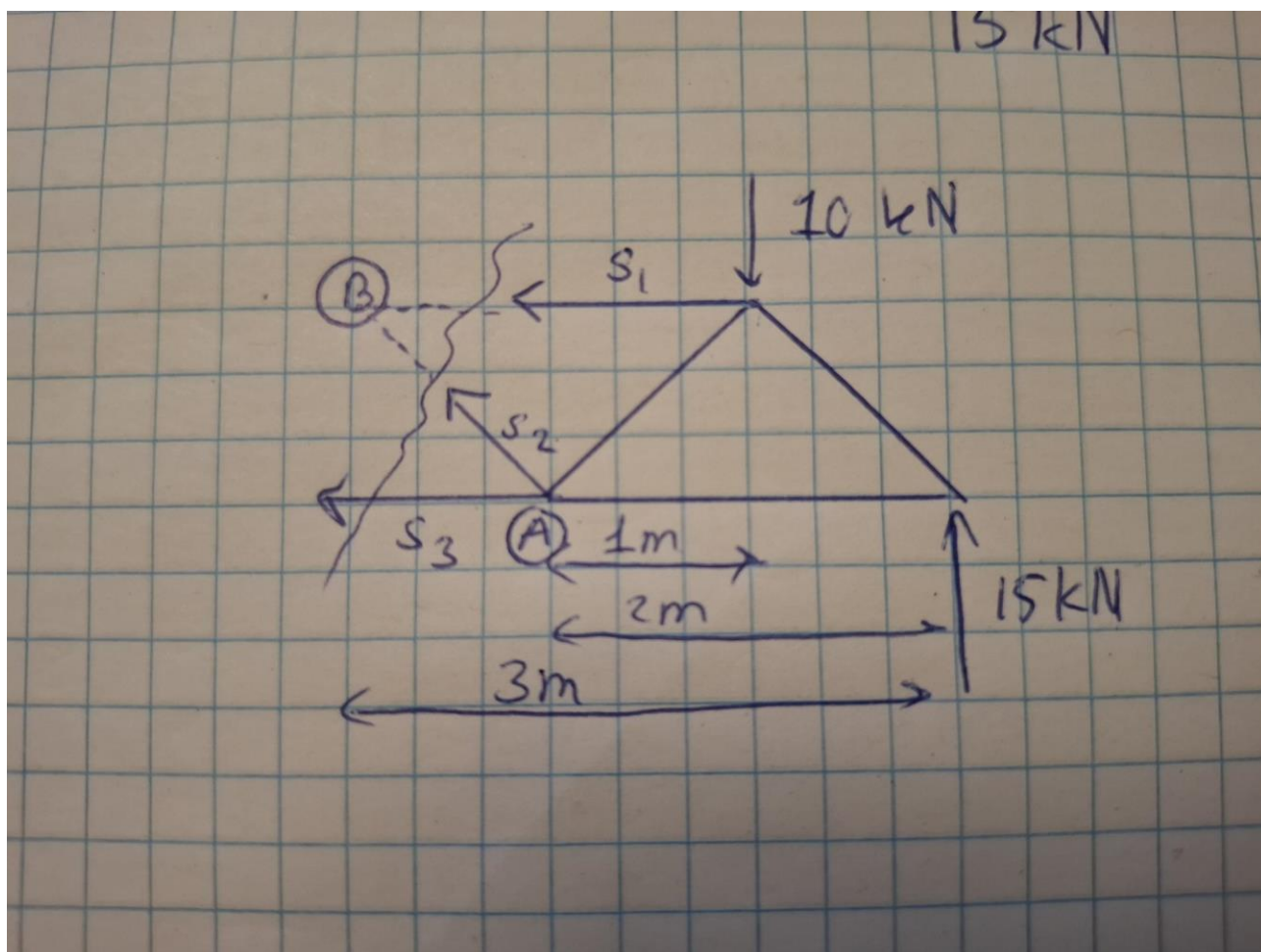
$$\frac{30 \text{ kN}}{2} = 15 \text{ kN}$$



Vi kigger nu kun på en lille del af gitterkonstruktionen. Ved at ligge et snit ned igennem de tre stænger så "deler" vi konstruktionen over i to. De to "dele" skal være i ligevægt hver især og derfor kan vi se på de tre stænger og se på ligevægten mellem dem og de ydre kræfter (og kun kigge på den ene del af figuren).



Kraftmomentet sætter vi til en start rundt om punktet A.



Dermed bliver momenterne fra stang nr. 2 og 3 nul (de har ingen "arm" ud fra punktet). Der er således kun bidrag fra stang nr 1 og de to ydre kræfter. Det samlede kraftmoment om punkt A skal være nul (ligevægt).

$$-1m \cdot S_1 + 10kN \cdot 1m - 15kN \cdot 2m = 0$$

Dette giver os en stangkraft for stang 1 til at være:

$$S_1 = -20kN$$

det betyder at det er en trykstang.

For stang nr 3 kan vi bruge punktet B, som egentligt ligger uden for figuren, men er det punkt for stang 1 og stang 2 mødes. Her er bidragene fra stang 1 og 2 nul, og det er kun stang 3 og de to ydre kræfter der giver bidrag. På samme måde som før:

$$S_3 \cdot 1m - 10kN \cdot 2m - 15kN \cdot 3m = 0$$

Det giver en stangkraft på

$$S_3 = 25 kN$$

Dette betyder at det er en trækstang.

For at finde  $S_2$  skal der i stedet benyttes at summen af kræfterne vertikalt er lig med nul. Til dette er der bidrag fra  $S_2$  (vertikal komponent) og de to ydre kræfter (som begge kun har vertikale komponenter i dette eksempel).

$$-10kN + 15kN + \sin(45^\circ) \cdot S_2 = 0$$

Dette giver en stangkraft på

$$S_2 = -7,071 kN$$

Som er en trykkraft.

Nu ser vi lidt på, hvordan nogle af stangkræfterne, for at se på om de er træk eller trykkrafter

Kilder:

ChatGPT promptet tekst, OpenAI

Holck, Per: *Orbit A, HTX*, 1.udgave. 2. Oplag, 2007 - 2009, Systime

Madsen, Preben: *Statik og Styrkelære*, 1. udgave, 1. oplag 2013, Nyt Teknisk forlag



# PASCO capstone program til måling af kraftpåvirkning

Til dataopsamling bruges programmet PASCO Capstone. Hvis I allerede har PASCO installeret, samt kender til opsætning af hardware (måleudstyret), kan I springe til punkt 7.

- 1) Installer programmet: Programmet kan downloades herfra

<https://www.pasco.com/downloads>

eller her

<https://www.pasco.com/products/software/capstone#downloads-panel>

Ved hentning af programmet skal der skrives navn, skole med mere, og der kræves licensnøgle til brug af programmet. Dog vil der ofte være muligt at download en version som er gratis i kortere tid. Licensen får du udleveret af din underviser/skole.

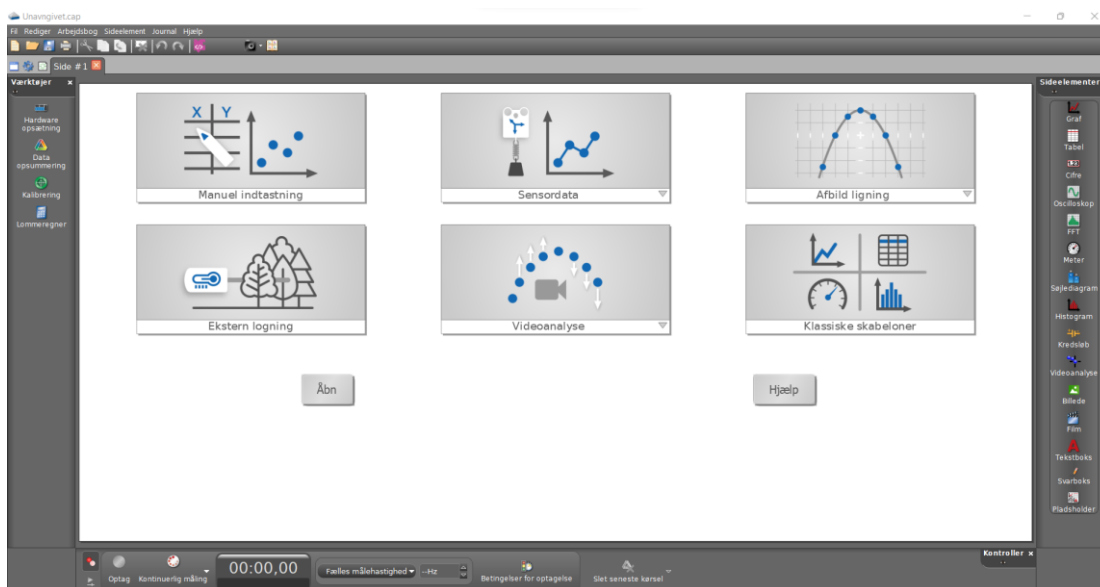


## PASCO Capstone v2.12

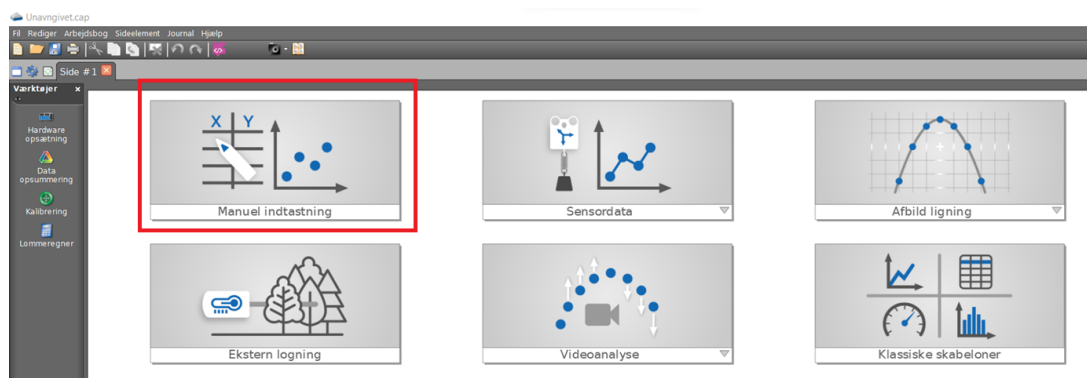
PASCO Capstone™ was designed to be the most powerful software available for high level physics and engineering applications or for anyone who wants the advanced capabilities it offers.

Figur 1: Ikon for programmet på deres hjemmeside. Versionsnummeret kan være anderledes, når nyere versioner er tilgængelige.

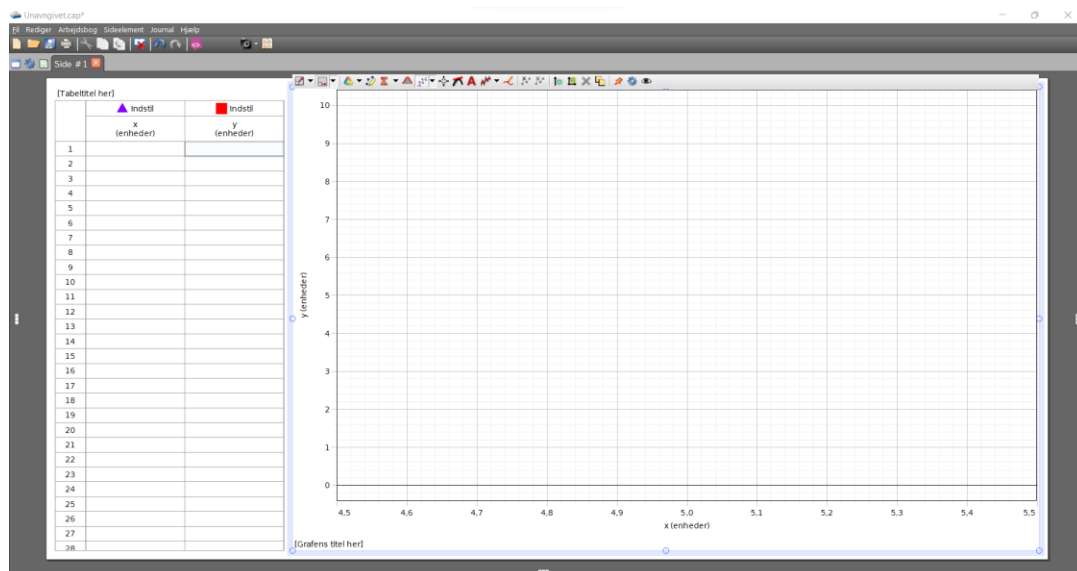
- 2) Åben programmet, så start menuerne er synlige, som vist på figuren nedenfor:




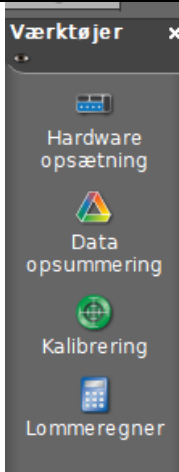
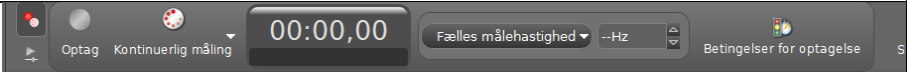
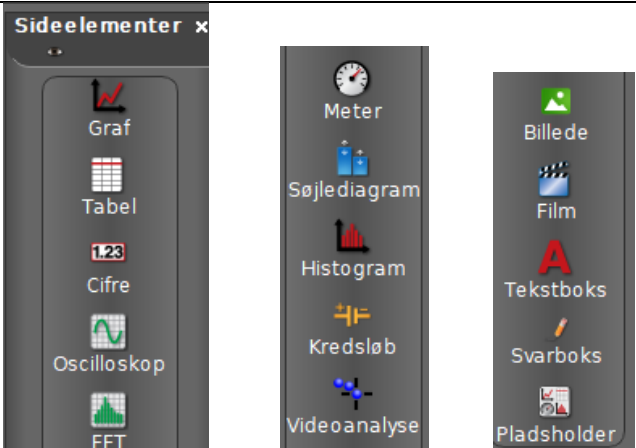
3) Vælg den "skabelon" der er øverst til venstre som hedder *Manuel indtastning*:



4) Der vises nu et skærmbillede der ser således ud (forklaring af funktionerne kommer under punkt 5):

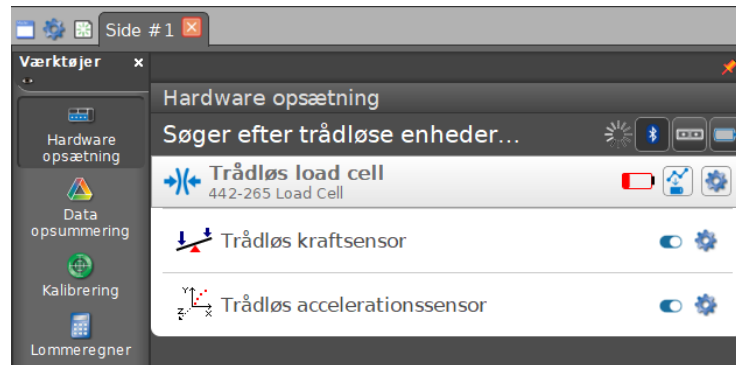


5) På både venstre og højre side, samt i midten af bunden, er der tre små prikker:  Disse gemmer på følgende menuer:

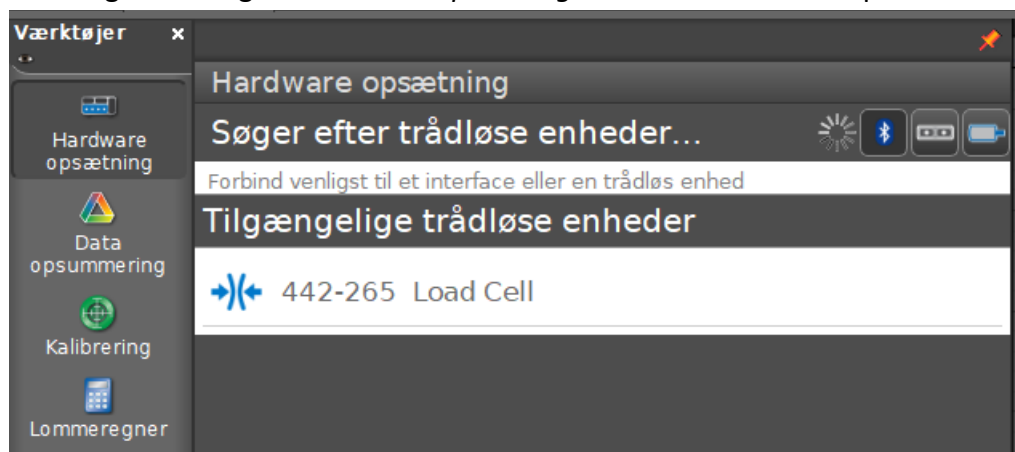
<p><i>Venstre:</i> Opsætning af dataopsamlingsudstyr</p>	
<p><i>Midt:</i> dataopsamlingsmetode (bla. hurtig/langsamt, manuel/kontinuerlig)</p>	
<p><i>Højre:</i> ekstra funktioner (indsæt ekstra graf, tabeller, cifre-visning med mere)</p>	

- 6) Vælg *Hardware opsætning* i venstre-menuen. Tænd kraftmåleren ved at holde knappen i bunden af måleren inde. Kraftmåleren kan sætte til på to måder:

- a. via stikket (USB): Hvis den sættes til via stikket, så bør computeren selv kunne genkende måleren som vist her:



- b. via bluetooth: Programmet undersøger hvilke enheder der i nærheden. Nummeret/navnet på kraftmåleren står på den, og skal matche den man efterfølgende vælger i *hardware opsætning* menuen ved at klikke på den:



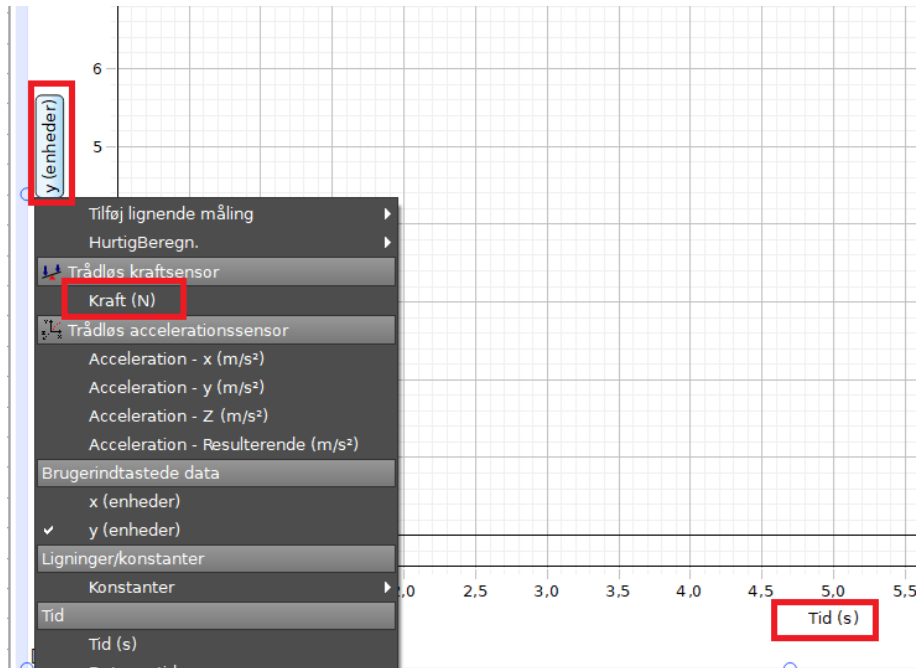
- c. Menuen lukkes ved at trykke på *Hardware opsætning* igen.

7) Nu skal tabellen og grafen opsættes:

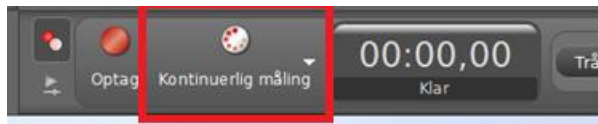
- a. For at få størrelserne i tabellen, trykkes der på "x'et" således at menuen bliver fremhævet:



d. På samme måde vælges x- og y-aksen på grafen ved siden af tabellen:

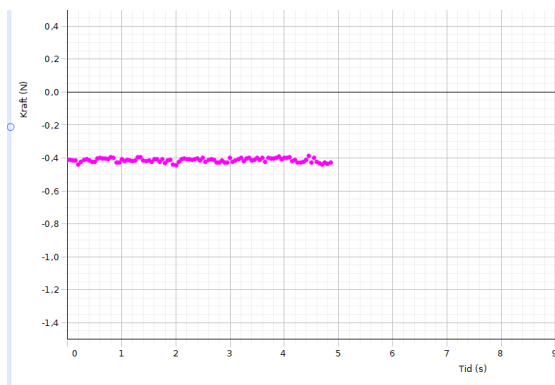


8) Det sidste der skal sættes op inden målingerne foretages, er selve målemetoden. Her vælges til en start *kontinuerlig måling*, som foretager målinger konstant, men specifikt tidsinterval (kan indstilles til anden værdi en standard, men behøves ikke ændres).

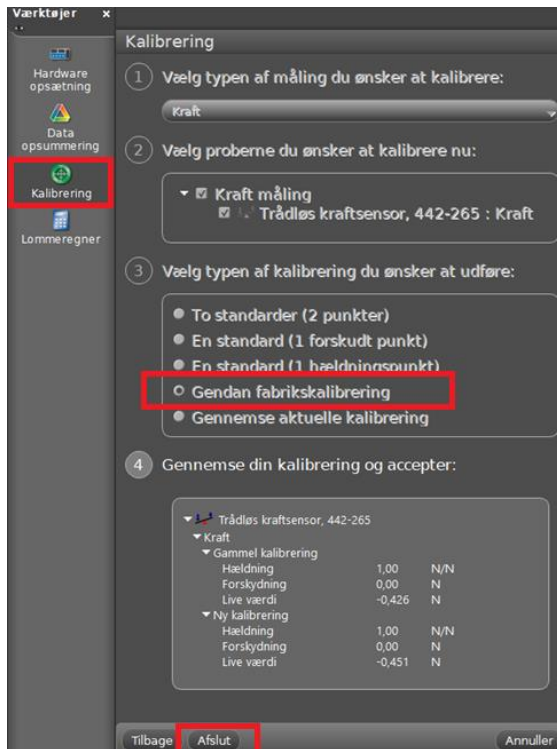


a. Vælges *manuel måling* så foretages først målinger når I ønsker det, om man skal trykke når der ønskes at der foretages en måling. Denne funktion kan være god til enkelt målinger.

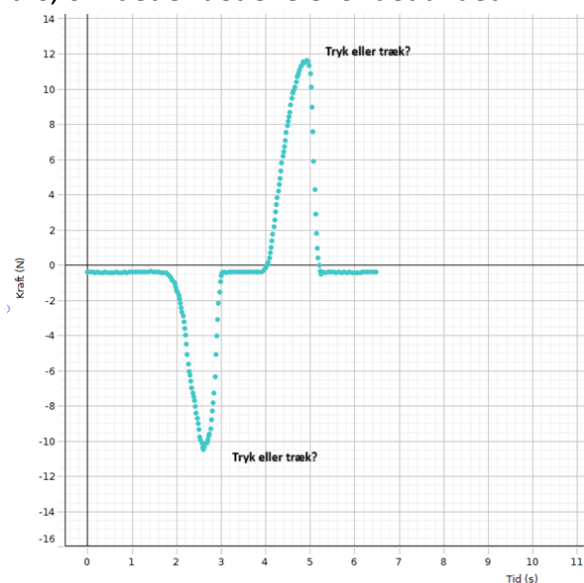
9) Sæt målingen i gang uden at påvirke kraftmålere, og se hvordan grafen ser ud (inden der kalibreres) og stop måling efter et par sekunder. I dette tilfælde ses det at måleren har et "offset" i forhold til nul:



10) Nulstil kraftmåleren: vælg *Kalibrering* og følg menuen (et punkt kommer på skærmen ad gangen) og vælg "Gendan fabrikskalibrering" og afslut, og luk *kalibrering* menuen efterfølgende. Test ved at lave en måling, at målingerne (når kraftmåleren ikke påvirkes) ligger omkring nulpunktet.



11) Målinger af kraftpåvirkning: Alt afhængigt af om måleren oplever et tryk eller et træk, så vil værdien af kraften være positiv eller negativ. Undersøg inden I foretages målinger på jeres bro, om det er det ene eller det andet:



## Materialer:

1) Til bygning af broen benyttes fra Frederiksen Scientific:

<https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/brobygning-stoerre-broer/me-6991>

Varenr. ME-6991

### Brobygning, større broer

2) Til dataopsamling benytte PASCO capstone, samt kraftmåler til dette program:

<https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/kraftfoeleraccelerometer-traadloes/ps-3216>

Varenr. PS-3216

### Kraftføler/accelerometer, trådløs

Måleudstyret benyttes i dette projekt/undervisningsmateriale primært til måling af kraftpåvirkning, men kan også måle acceleration ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

3) Udover disse anbefales det at have små/mindre lodder til f.eks. at ændre på masse af den vogn der kan køre på broens bane eller til at hænge på broen. Sæt med lod mellem  $20g$  og  $200g$  (som kan sættes sammen/kombineres) bør være nok. Følgende har været i brug på UCRS, da kroge på lodderne passer nogenlunde til at sætte på broens bjælker.

<https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/lodder-med-krog-sortiment/191090>

Varenr. 191090

### Lodder med krog, sortiment

Eksempel på materialerne ses på billedet nedenfor:



Figur 2 Materialer fra Frederiksen Scientific fra brobygning sæt, samt kraftmåler.